Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = x \cdot \ln x$

2) $g(x) = 3e^{x^2+1}$

b) Bestem følgende grenseverdi, dersom den eksisterer:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

c) En funksjon f er kontinuerlig, men ikke deriverbar i punktet $(1\,,\,2)$. Tegn en skisse av grafen til en mulig funksjon f.

d) Finn de eksakte løsningene av likningene

1) $2\ln x - 4 = 0$

2) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

e) Skriv så enkelt som mulig

1) $\dfrac{2^{-4}\cdot 2^{3}}{2^{-2}}$

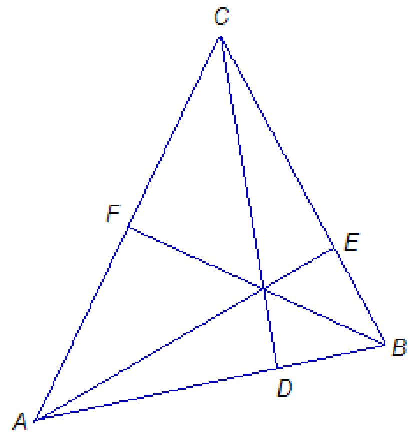
2) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\left(ab^2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot b}{\left(a^2b\right)^{2}\cdot b^{-\frac{1}{3}}}$

f) Vi har gitt en trekant ABC. Punktet *D* ligger på *AB,* punktet *E* ligger på *BC,* og punktet *F* ligger på *AC.* Se figuren.

Cevas setning sier:

Linjestykkene *AE*, *BF* og *CD* skjærer hverandre i ett punkt hvis og bare hvis

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$



Bruk Cevas setning til å bevise at medianene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt.

Oppgave 2

a) Vis at polynomet $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ er delelig med $x-2$.

b) Skriv $f(x)$ som et produkt av førstegradsfaktorer.

c) Løs ulikheten $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-9}>0$.

d) Bestem a slik at likningen $x^3-2x^2-5x+a=0$ får en løsning lik 1. Løs likningen for denne verdien av a.

Del 2

Oppgave 3

På en skole er det 55 % jenter og 45 % gutter på Vg2. Av jentene har 25 % valgt matematikk R1. Av guttene har 30 % valgt R1.

a) Formuler de to siste opplysningene i teksten ovenfor som betingede sannsynligheter.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er en gutt som har valgt R1.

c) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev har valgt R1.

Av alle elevene på Vg2 har 30 % valgt fysikk. Blant dem som har valgt R1, er det 80 % som har valgt fysikk.

d) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt fysikkelev har valgt R1.

Oppgave 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

En partikkel beveger seg i planet. Posisjonen til partikkelen ved tiden t er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[t^2\,,\ t^3 - 3t\right] \text{ der } t \in \left[0\,,\ 2\right]$$

a) Tegn grafen som beskriver bevegelsen til partikkelen.

b) Bestem ved regning koordinatene til skjæringspunktene mellom grafen og koordinataksene.

c) Finn et uttrykk for fartsvektoren $\vec{v}$. Hva er t når $\left|\vec{v}(t)\right| = 3$?

d) Bestem koordinatene til de punktene på kurven der fartsvektoren er parallell med koordinataksene.

e) Bestem koordinatene til det punktet der farten er minst.

Alternativ II

I denne oppgaven kan det være naturlig å bruke dynamisk programvare, men oppgaven kan også løses ved å bruke grafisk lommeregner. I løsningen av oppgaven vil det være aktuelt å skissere flere grafer.

a) Tegn grafen til funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Tangenten til grafen i punktet $(a, f(a))$ skjærer *x*-aksen i punktet A og *y*-aksen i punktet B. Punktet O er origo.

b) Bestem arealet av ΔOAB for $a = 2$ enten grafisk eller ved regning.

c) Gjenta det du gjorde i b) for $a = \frac{1}{2}$ og $a = 3$. Kommenter svarene.

Vi skal nå studere størrelsen av arealet av ΔOAB analytisk.

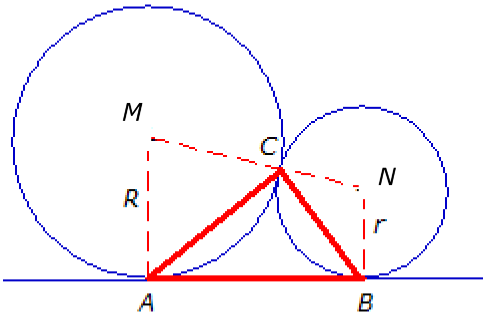
d) Bestem $f'(x)$. Finn likningen for tangenten til funksjonen f i punktet $(a, f(a))$.

e) Bestem koordinatene til skjæringspunktene A og B mellom tangenten og koordinataksene. Hva blir arealet av ΔOAB?

Oppgave 5

Bildet til venstre viser to baller som ligger inntil hverandre. Ballene har radiene R og r. Berøringspunktet mellom ballene og bordet kalles henholdsvis A og B. Berøringspunktet mellom ballene kalles C.

I denne oppgaven skal vi undersøke egenskaper ved ΔABC.



Figur 1

Figur 1 til venstre viser et snitt gjennom sentrene i ballene, M og N.

a) Forklar at $\angle BAM = \angle NBA = 90^\circ$, og at $\angle MNB = 180^\circ - \angle AMC$.

b) Vis at $AB = 2\sqrt{Rr}$. (Tips: Bruk Pythagoras' setning.)

Vi setter $\angle AMC = v$, $\angle BCN = u$ og $\angle ACM = w$.

c) Vis at $u + w = 90^\circ$, og at $\angle ACB = 90^\circ$.

I resten av oppgaven ser vi på to andre sirkler med $R = 4\,\text{cm}$ og $r = 1\,\text{cm}$.

d) Bruk b) til å finne lengden av AB.

e) Konstruer med passer og linjal figur 1 med $R = 4\,\text{cm}$ og $r = 1\,\text{cm}$. Skriv en forklaring til konstruksjonen.

f) Slå en halvsirkel med AB som diameter. Forklar hvorfor denne halvsirkelen går gjennom C.