DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (18 poeng)

a) Vis at den deriverte til funksjonen $O(x)=\dfrac{500}{x}+8x^2$ er

$$O'(x)=\frac{-500+16x^3}{x^2}$$

b) Deriver funksjonene

1) $f(x)=3\ln(2x)$

2) $g(x)=3x\cdot e^{x^2}$

c) Vi har gitt polynomfunksjonen $f(x)=x^3-3x^2-13x+15$

1) Vis at $f(1)=0$. Bruk polynomdivisjon til å faktorisere $f(x)$ i førstegradsfaktorer.

2) Løs ulikheten $f(x)\le 0$

d) Mengden av lava som spruter ut per time ved et vulkanutbrudd, kan tilnærmet beskrives ved et funksjonsuttrykk $f(t)$. Funksjonsverdiene er målt i tonn, og t er antall timer etter begynnelsen av utbruddet.

Du får vite at: $f(0)=300$, $f'(10)=0$ og $f''(10)=-10$

Hva kan du si om vulkanutbruddet på grunnlag av disse opplysningene?

e) Skriv så enkelt som mulig

$$\lg\left(a^2\cdot b\right)+\lg\left(a\cdot b^2\right)+\lg\left(\frac{a}{b^3}\right)$$

f) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{2x+10}{x^2-25}+\frac{x}{x+5}-\frac{2}{x-5}$$

g) En linje l har parameterframstillingen

$$l:\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \end{cases}$$

Et punkt $P(4,\ 1)$ ligger utenfor linjen.

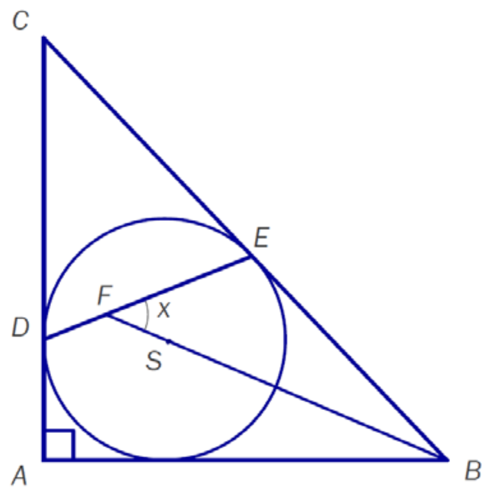
Regn ut avstanden fra P til linjen l.

h) Et linjestykke AB har lengde 10 cm. Konstruer en ΔABC der $\angle C=90°$ og $AC=7$ cm

Oppgave 2 (6 poeng)

I en $\Delta\ ABC$ er $\angle A=90°$. En sirkel med sentrum i S er innskrevet i trekanten. Sidene AC og BC tangerer sirkelen i punktene D og E. Linjen gjennom B og S skjærer DE i F.

Se skissen til høyre.



Du får oppgitt at $DC=EC$.

Vi setter $\angle ABC=v$, $\angle BCA=u$ og $\angle BFE=x$

a) Forklar at $u+v=90°$ og at $\angle DEC=90°-\dfrac{u}{2}$

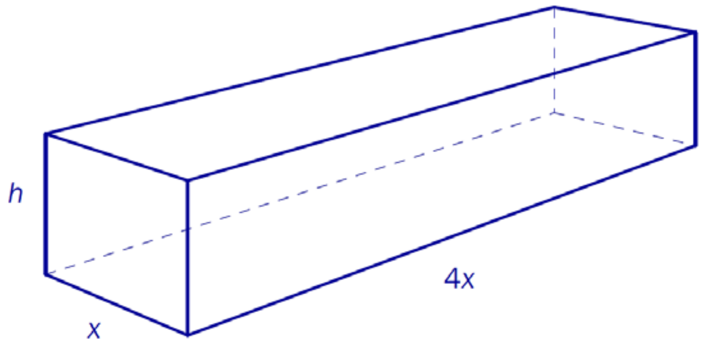
b) Forklar at $\angle FBE=\dfrac{v}{2}$ og at $\angle BEF=90°+\dfrac{u}{2}$

c) Vis at $x=45°$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 3 (7 poeng)

Vi har et rett prisme der lengden av grunnflaten er fire ganger så stor som bredden. Volumet er $200\ \text{cm}^3$. Vi setter bredden lik x cm. Se skissen.



a) Vis at $h = \dfrac{50}{x^2}$

b) Vis at overflaten O av prismet kan skrives

$$O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2$$

c) I oppgave 1 a) i Del 1 viste du at $O'(x) = \dfrac{-500 + 16x^3}{x^2}$.

Bruk den deriverte til å finne den minste overflaten O som prismet kan ha.

Hva er lengden, bredden og høyden nå?

Vi har et annet rett prisme der lengden av grunnflaten er *tre* ganger så stor som bredden. Volumet er $200\ \text{cm}^3$.

d) Finn den minste overflaten som dette prismet kan ha.

Oppgave 4 (4 poeng)

På en skole er det 350 elever. 150 av disse er gutter. En undersøkelse viser at 100 gutter og 180 jenter har med seg matpakke hver dag.

Én elev trekkes ut tilfeldig. La A og B være de to hendelsene

A: Eleven er en gutt.

B: Eleven har med matpakke hver dag.

a) Forklar med ord hva vi mener med $P(A \cap B)$. Finn denne sannsynligheten.

b) Finn sannsynlighetene $P(B)$ og $P(B|A)$.

Er de to hendelsene A og B uavhengige?

Oppgave 5 (9 poeng)

Punktene $A(2, -1)$ og $B(5, 3)$ er gitt.

a) Finn $\overrightarrow{AB}$ og regn ut $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Vektoren $\overrightarrow{AC} = [-1, 2]$ er gitt.

b) Bestem koordinatene til punktet C.

c) Regn ut $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ og kommenter svaret.

En rett linje l går gjennom punktet $P(3, -4)$ og er parallell med $\overrightarrow{AC}$.

d) Finn en parameterframstilling for linjen l.

e) Finn koordinatene til punktet der l skjærer y-aksen.

Punktet $Q(8, 6)$ er gitt. En vektor $\overrightarrow{QR}$ har lengden 10, og R er et punkt på linjen l.

f) Bestem koordinatene til R.

Oppgave 6 (2 poeng)

Du får oppgitt at en funksjon f er definert for $x \in \langle 0, 10 \rangle$. Funksjonen er kontinuerlig, men ikke deriverbar i $x = 2$, og ikke kontinuerlig i $x = 5$. Tegn en skisse som viser hvordan grafen til f kan se ut.

Oppgave 7 (6 poeng)

I denne oppgaven skal vi undersøke påstanden:

> *Alle primtall som er større enn 2, kan skrives som differansen mellom to kvadrattall.*

a) Skriv av og fyll ut tabellen

Primtall	Naturlige tall		Kvadrattall		Differanse
p	n_1	n_2	n_1^2	n_2^2	$n_1^2 - n_2^2$
3	2	1	2^2	1^2	3
5	3	2	3^2	2^2	5
7	4	3	4^2	3^2	7
11	6	5	6^2	5^2	11
13					
17					
19					

I tabellen er p primtall, og n_1 og n_2 er naturlige tall, slik at:

$$n_1 + n_2 = p$$

$$n_1 - n_2 = 1$$

b) Vis at vi kan skrive: $n_1 = \dfrac{p+1}{2}$ og $n_2 = \dfrac{p-1}{2}$

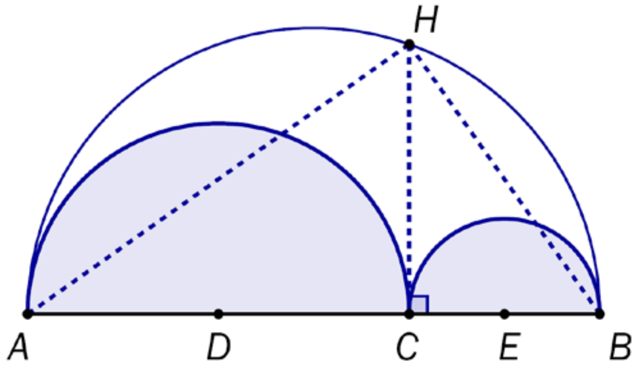
c) Bevis at påstanden i ruten ovenfor er riktig.

Oppgave 8 (8 poeng)

Matematikeren Arkimedes (ca. 287–212 f.Kr.) studerte figuren du ser nedenfor. Det hvite området på figuren kalles *skomakerkniven*.

Området er avgrenset av en ytre halvsirkel og to indre halvsirkler. De to indre halvsirklene, som er fargelagt på figuren, har sentrum i D og E.

De indre halvsirklene har radius R og r. Punktene D, C og E ligger på linjestykket AB.



a) Vis at lengden av sirkelbuen AB er lik summen av lengdene av de to sirkelbuene AC og CB.

På figuren er $CH \perp AB$.

b) Forklar at ΔACH er formlik med ΔHCB.

c) Bruk dette til å vise at $CH = 2\sqrt{R \cdot r}$

d) Vis at arealet av en sirkel med diameter CH er lik arealet av *skomakerkniven*.