Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

b) Forklar hva det betyr at en vinkel er målt i radianer. Hvilken sammenheng er det mellom radianer og grader?

c) Løs differensiallikningen $y' + 2y = 3x$ når $y(0) = 3$

d) Vi har polynomfunksjonen $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

1) Vis at $f(x)$ er delelig med $(x-1)$ og faktoriser $f(x)$.

2) Vis at $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$ kan skrives $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$

3) Bestem integralet

$$\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\, dx$$

e) I en rekke er $a_1 = x - 1$, $a_2 = 2x$ og $a_3 = 4x + 8$. Bestem x slik at rekken blir geometrisk.

f) Summen av de n første leddene i en generell geometrisk rekke er

$$S_n = \frac{a_1\left(k^n - 1\right)}{k - 1}$$

Bevis denne formelen ved induksjon.

Oppgave 2

Gitt punktene $A(1,1,1)$, $B(3,2,3)$ og $C(2,7,5)$.

a) Finn $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Punktene A, B og C ligger i planet α.

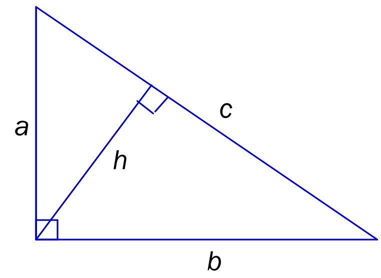
c) Finn likningen til planet α. Undersøk om punktet $D(2,2,3)$ ligger i planet α.

d) Bestem en parameterframstilling for en linje l som går gjennom punktet D, og som står vinkelrett på planet α. Finn skjæringspunktet S mellom l og α.

Del 2

Oppgave 3

Vi har en rettvinklet trekant med kateter a og b og hypotenus c. Høyden ned på hypotenusen kalles h. Se figuren til høyre.

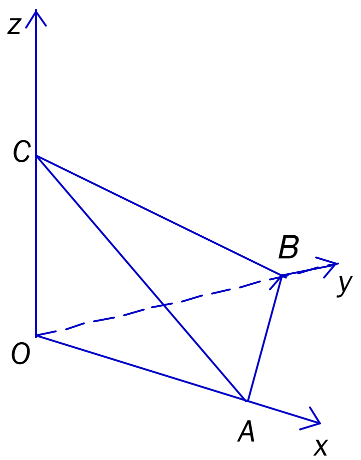


a) Forklar at $a \cdot b = c \cdot h$

Bruk Pytagoras' setning og vis at

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

Vi vil nå studere tetraederet *OABC*. Hjørnet O er plassert i origo, $A(a,\ 0,\ 0)$ på x-aksen, $B(0,\ b,\ 0)$ på y-aksen og $C(0,\ 0,\ c)$ på z-aksen. Se figuren nedenfor.



b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ uttrykt ved a, b og c. Finn arealet av trekanten *ABC*.

En arealsetning som er oppkalt etter Pytagoras, sier at

$$F_{\triangle ABC}^2 = F_{\triangle OAC}^2 + F_{\triangle OBC}^2 + F_{\triangle OAB}^2$$

Her betyr $F_{\triangle ABC}$ arealet av trekanten *ABC*. Tilsvarende gjelder for leddene på høyre side.

c) Kontroller at arealsetningen er riktig.

d) Avstanden fra O til $\triangle ABC$ kalles h. Forklar at vi kan skrive

$$F_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2h}$$

e) Bruk c) og d) til å vise at

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

Oppgave 4

Du skal svare på <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge oppgavene,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Vi vil studere en periodisk funksjon f gitt på formen

$$f(x) = a\cos(cx - \varphi) + d \qquad \text{når} \qquad x \in \langle 0, 12 \rangle$$

Her er a, c, d og φ konstanter.

Det oppgis at grafen til f har toppunkt i $(1, 6)$, og at det nærmeste bunnpunktet er $(3, -1)$.

a) Forklar at grafen til f må ha toppunkt også i $(5, 6)$. Skriv koordinatene til ett toppunkt og to bunnpunkter til. Bestem funksjonsuttrykket til f.

b) Hvor avtar funksjonen raskest?

c) Finn nullpunktene til funksjonen ved regning.

d) Tegn grafen til f. Finn det samlede arealet av flatestykkene som er avgrenset av grafen til f og linjen $y = 5$, og som ligger på oversiden av linjen.

Alternativ II

Vi har funksjonen

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad D_f = [0, 9]$$

a) Bestem volumet av det omdreiningslegemet vi får dersom grafen til f dreies 360° om x-aksen.

En linje l er gitt ved likningen $y = k$, der k er en konstant $k \in [0, 3]$.

b) Forklar at volumet av det omdreiningslegemet vi får når grafen til f dreies 360° om linjen l, er gitt ved

$$V(k) = \pi \int_0^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - k\right)^2 dx$$

c) Finn $V(k)$.

d) Bestem hvilken verdi for k som gir det minste volumet.

Oppgave 5

En ball med masse $m = 2\ \text{kg}$ slippes fra en høyde $h = 30\ \text{m}$. Vi antar at luftmotstanden er proporsjonal med farten v. Fra tidligere forsøk vet vi at den maksimale farten denne ballen kan oppnå når den faller, er $40\ \text{m/s}$. Vi lar tyngdeakselerasjonen være $10\ \text{m/s}^2$.

I denne oppgaven vil vi regne uten benevning.

Bruker vi opplysningene ovenfor sammen med Newtons 2. lov, får vi at farten v må tilfredsstille differensiallikningen

$$v' + \frac{1}{4}v = 10$$

der $v = v(t)$ er farten etter t sekunder.

a) Forklar at $v(0) = 0$ og løs differensiallikningen.

Etter t sekunder har ballen falt strekningen s gitt ved $s'(t) = v(t)$.

b) Finn et uttrykk for $s(t)$.

c) Hvor lang tid tar det før ballen treffer bakken? Hva er farten da?

I stedet for å slippe ballen kaster vi den vertikalt nedover med startfarten v_0.

d) Hva må v_0 være for at ballen skal bruke 2 sekunder før den treffer bakken?