DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (24 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = x \cdot e^x$

2) $g(x) = 2\sin 2x$

3) $h(x) = 2\sin^2 x$

b) Bestem integralene

1) $\int x \cdot \cos x \, dx$

2) $\int \frac{4}{x^2 - 4} \, dx$

3) $\int \sin x \cdot \cos^3 x \, dx$

c) Vi har gitt rekken

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$$

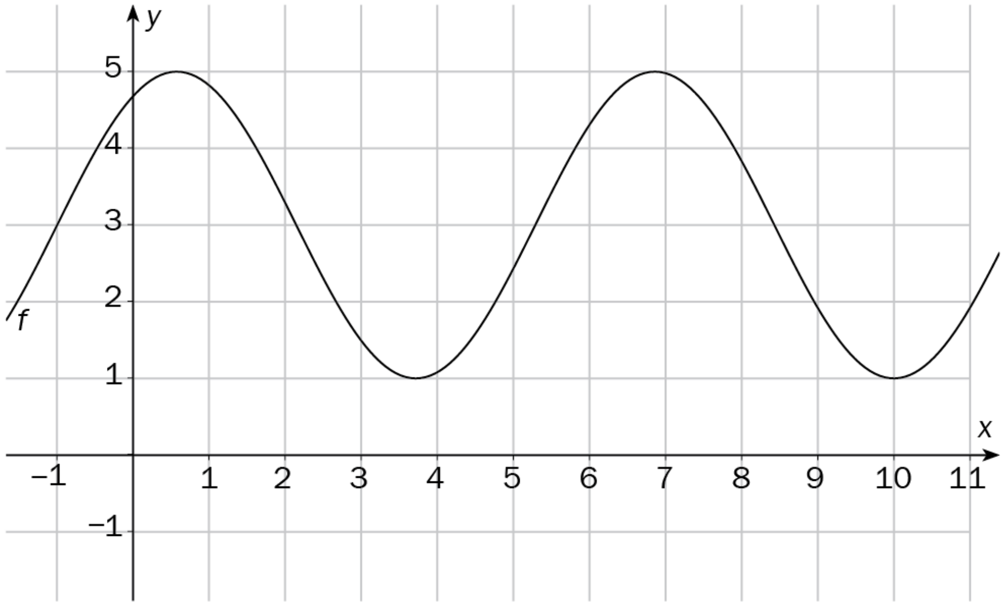
Skriv opp S_1 , S_2 , S_3 , S_4 og bestem S_{100}

d) Vi har gitt rekken

$$1 + 7 + 19 + 37 + \cdots$$

Skriv opp S_1 , S_2 , S_3 , S_4 og bestem S_{100}

e) Grafen til en trigonometrisk funksjon av typen $f(x) = a \cdot \sin\left(cx + \varphi\right) + d$ er gitt nedenfor.



1) Bruk grafen til å bestemme amplituden, perioden og likevektslinjen til funksjonen.

2) Bestem et funksjonsuttrykk for $f(x)$.

f) Løs differensiallikningen

$$y' - 3y = 5 \quad \text{når} \quad y(0) = 2$$

g) Vi har gitt punktene $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 3)$ og $C(7, 3, 5)$

1) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

2) Vis ved regning at $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \perp \overrightarrow{AB}$ og $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \perp \overrightarrow{AC}$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 2 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 4\sin(2x - 2) + 5$$

a) Tegn grafen til f når $x \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$

b) Bruk funksjonsuttrykket og egenskaper ved sinus til å forklare at maksimalverdien er lik 9. Bestem på samme måte minimalverdien. Finn de tilhørende *x*-verdiene.

c) Bestem parametrene a, c, φ og d når vi skriver funksjonsuttrykket på formen

$$f(x) = a \cdot \cos(cx + \varphi) + d\,.$$

Oppgave 3 (8 poeng)

Vi har gitt den uendelige rekken

$$2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots$$

a) Hva slags rekke er dette? Begrunn svaret ditt.

b) Bestem konvergensområdet til rekken.

c) Vis at summen av rekken er $S(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

d) Tegn grafen til $S(x)$

e) Løs likningen $S(x) = -1$ og $S(x) = 3$ både grafisk og ved regning.

Oppgave 4 (8 poeng)

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x)=x^2+3 \quad \text{og} \quad g(x)=-x^3+x^2+4x+3$$

a) Tegn grafene til f og g i samme koordinatsystem.

b) Bestem koordinatene til skjæringspunktene mellom f og g ved regning.

To områder blir avgrenset av grafene til f og g.

c) Bestem arealene til hvert av disse områdene. Kommenter svaret ditt.

Vi har gitt funksjonen

$$h(x)=-x^3+x^2+cx+3$$

Når $c>0$, vil grafene til f og h avgrense to områder.

d) Vis ved regning at arealene til disse to områdene er like store.

Oppgave 5 (6 poeng)

Likningen til en kule er gitt ved

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + z^2 - 6z - 14 = 0$$

a) Vis at kula har sentrum i $(2, -3, 3)$. Bestem radien til kula.

En rett linje l gjennom sentrum er gitt ved

$$l: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

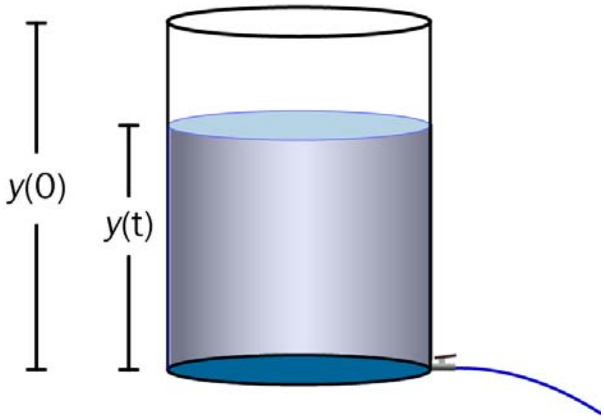
b) Bestem skjæringspunktene for l og kula.

Planene α og β tangerer kula i hvert sitt skjæringspunkt.

c) Bestem likningene til planene α og β.

Oppgave 6 (7 poeng)

En tank inneholder vann. Vi vil undersøke hvor høyt vannet står i tanken t minutter etter at vannet har begynt å renne ut. Vi lar vannstanden (vannhøyden) være $y(t)$.



Torricellis lov sier følgende:

Vannstanden avtar med en hastighet som er proporsjonal med kvadratroten av vannstanden.

a) Forklar at Torricellis lov gir differensiallikningen

$$y' = -k \cdot \sqrt{y} \ , \text{ der } k > 0$$

b) Bruk metoden for løsning av separable differensiallikninger til å vise at den generelle løsningen til likningen i oppgave 6 a) er gitt ved $y = \frac{1}{4}\left(-kt + C\right)^2$

Du får vite at $y(0) = h$ og $y(10) = \frac{h}{4}$

c) Vis at én løsning for konstantene er $C = 2\sqrt{h}$ og $k = \frac{\sqrt{h}}{10}$

Bestem hvor lang tid det tar før tanken er tom.