DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = e^x \cdot \cos x$

b) $g(x) = 5(1 + \sin x)^3$

Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralene

a) $\int \cos x \cdot (1 + \sin x)^3 \, dx$

b) $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

Vi har gitt punktene $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 5)$ og $C(3, 7, 3)$.

a) Undersøk om $\triangle ABC$ er rettvinklet.

b) Bestem koordinatene til et punkt D slik at $\square ABCD$ blir et parallellogram.

Oppgave 4 (4 poeng)

Vi har gitt differensiallikningen

$$y'' - y = 0 \quad \text{der } y \text{ er en funksjon av } x.$$

a) Vis at $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$ er løsning av differensiallikningen, når C_1 og C_2 er konstanter.

b) Bestem C_1 og C_2 når $y(0) = 5$ og $y'(0) = -1$

Oppgave 5 (2 poeng)

Vi har gitt den uendelige rekken

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$$

Forklar at rekken konvergerer, og bestem summen av rekken.

Oppgave 6 (2 poeng)

En periodisk funksjon f er gitt på formen

$$f(x)=a\sin(cx+\varphi)+d$$

Grafen til f går gjennom punktet $A(0,5)$, den har bunnpunkt i $B(3,2)$ og toppunkt i $T(5,8)$. Det er ingen andre ekstremalpunkter i intervallet $\langle 3,5 \rangle$.

Bestem verdier for konstantene a, c, φ og d.

Oppgave 7 (3 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x)=x^2\cdot e^{-x}$$

a) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

b) Tegn en skisse av grafen til f.

Oppgave 8 (3 poeng)

Bevis påstanden ved induksjon

$$P(n):\ 1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\cdots+n\cdot(n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3} \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (7 poeng)

En funksjon er gitt ved

$$f(x) = 8\,\mathrm{e}^{-x} \cdot \sin 2x$$

a) Tegn grafen til f, og bestem eventuelle null-, topp-, bunn- og vendepunkter når $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

I en formelsamling for matematikk finner vi formelen

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{ax} \cdot \sin bx \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\,(a \sin bx - b \cos bx) + C}$$

b) Bruk formelen til å bestemme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
Kontroller svaret ved derivasjon.

c) Bestem det samlede arealet av områdene som er avgrenset av $x-$aksen og grafen til f når $x \in [\,0, \pi\,]$.

Oppgave 2 (6 poeng)

Kilde: blogs.reuters.com (01.06.2012)

Farten v til en sprinter måles i meter per sekund og er en funksjon av tiden t. Tiden t er målt i sekunder etter start. Farten v er en løsning av differensiallikningen

$$v' = 12{,}0 - 1{,}15 \cdot v$$

a) Løs differensiallikningen og bestem $v(t)$ når du får vite at $v(0) = 0$

b) Strekningen s måles i meter og er definert ved

$$s' = v \quad \text{og} \quad s(0) = 0$$

Bestem en formel for $s(t)$.

c) Hvor lang tid vil sprinteren bruke på 100 m, ifølge modellen ovenfor?

Oppgave 3 (8 poeng)

Gitt vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Ingen av vektorene er $\vec{0}$.

a) Forklar hvordan vektorene ligger i forhold til hverandre

1) når $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
2) når $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$
3) når $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$

b) Bruk definisjonen av $\vec{a}\cdot\vec{b}$ og $\vec{a}\times\vec{b}$ til å vise

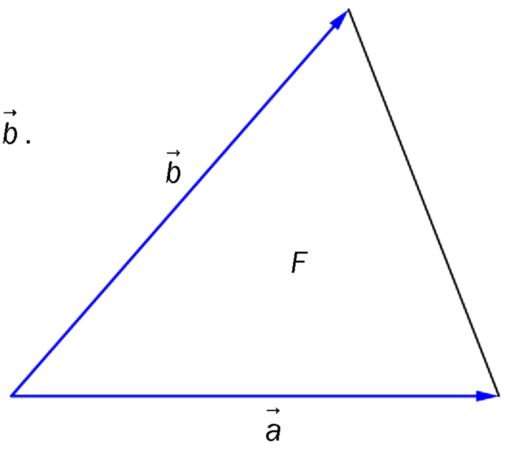
$$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$$

c) Skisse 1 viser en trekant utspent av vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Forklar at arealet F av trekanten er

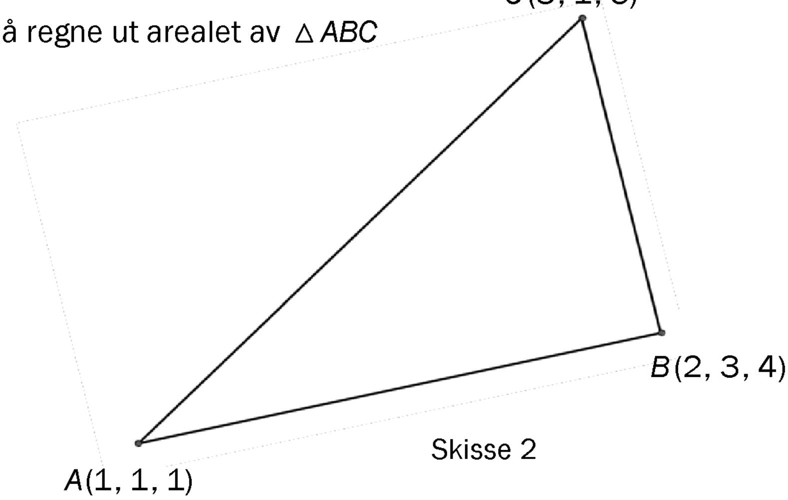
$$F=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

Kommenter hvert av de to tilfellene $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ og $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.



Skisse 1

d) Bruk uttrykket i oppgave c) til å regne ut arealet av $\triangle ABC$ i skisse 2.



Skisse 2

Oppgave 4 (4 poeng)

Vi har gitt rekken

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

a) Bestem et uttrykk for summen S_n av de n første leddene, og bestem hvor mange ledd vi må ta med for at S_n skal bli 1 600.

En uendelig rekke er gitt ved

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$$

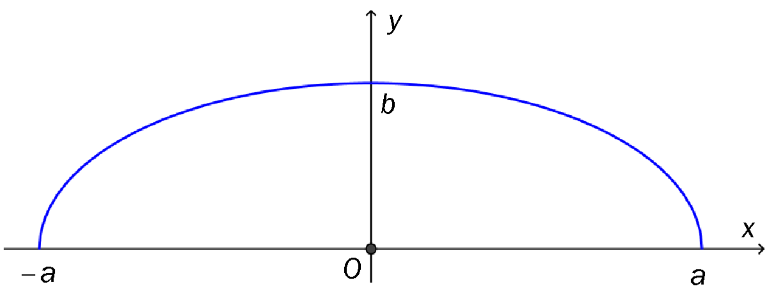
b) Forklar at dette er en konvergent, geometrisk rekke. Bestem summen av rekken.

Oppgave 5 (4 poeng)

En såkalt *ellipse* med sentrum i origo O er gitt ved likningen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

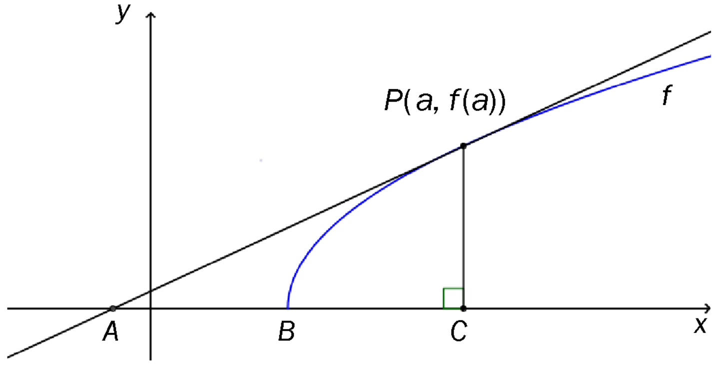
Hvis vi dreier øvre halvdel av ellipsen 360° om $x-$aksen, får vi et omdreiningslegeme som vi kaller en *ellipsoide*.



a) Vis at likningen for ellipsen kan omformes til $y^2=b^2-\dfrac{b^2x^2}{a^2}$

b) Bruk integrasjon for å vise at formelen for volumet av ellipsoiden er $\dfrac{4}{3}\pi a b^2$

Oppgave 6 (7 poeng)



Skissen ovenfor viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

På skissen er det også tegnet inn tangenten til grafen i punktet $P(a, f(a))$.

a) Vis at likningen til tangenten er

$$y = \frac{1}{2\sqrt{a-2}}x + \frac{a-4}{2\sqrt{a-2}}$$

Bestem koordinatene til punktene A, B og C på figuren.

b) Vis at arealet av området som er avgrenset av grafen til f og $x-$aksen fra B til C er

$$\frac{2}{3}(a-2)^{\frac{3}{2}}$$

Bestem også arealet av $\triangle ACP$.

c) Grafen til f deler $\triangle ACP$ i to områder.
Vis at arealet til det ene området er dobbelt så stort som arealet til det andre.