DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3\cos 2x$

b) $g(x) = e^{\sin x}$

c) $h(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (x^2 - 3x + 2)\, dx$

b) $\int x \cos x\, dx$

c) $\int 2x \sin x^2\, dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

En rett linje går gjennom $A(0, 0)$ og $B(h, r)$ der h og r er to positive tall.

a) Bestem ligningen for linjen, uttrykt ved h og r.

Linjestykket AB roteres $360°$ om x-aksen. Vi får da et omdreiningslegeme.

b) Bestem et uttrykk for volumet til omdreiningslegemet.
Hva slags legeme har du regnet ut volumet til?

Oppgave 4 (6 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5 \quad , \qquad D_f = \langle 0\ ,\ 12 \rangle$$

a) Bestem perioden til f.

b) Bestem ekstremalverdiene y_{min} og y_{maks}.

c) Forklar hvorfor grafen vil ha alle sine vendepunkter på likevektlinjen.
Bestem koordinatene til vendepunktene.

d) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 5 (5 poeng)

Vi har gitt differensialligningen

$$y'' - 4y' - 5y = 0$$

a) Vis at $y = \mathrm{e}^{rx}$ er en løsning til differensialligningen når $r^2 - 4r - 5 = 0$.

b) Bestem den generelle løsningen til differensialligningen.

c) Bestem den spesielle løsningen som tilfredsstiller betingelsene $y(0) = 6$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 6 (5 poeng)

Brøken B_n er definert ved at telleren er summen av de n første oddetallene, mens nevneren er summen av de n neste oddetallene.

a) Regn ut $B_2 = \dfrac{1+3}{5+7}$, $B_3 = \dfrac{1+3+5}{7+9+11}$ og $B_4 = \dfrac{1+3+5+7}{9+11+13+15}$. Forkort svarene.

b) Vis at summen av de n første oddetallene kan skrives $S_n = n^2$.

c) Forklar at $B_n = \dfrac{S_n}{S_{2n} - S_n}$. Regn ut denne brøken.

Oppgave 7 (7 poeng)

Ligningen til en kuleflate er gitt ved

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 6z = 14$$

a) Vis at punktet $A(4,\, 3,\, 3)$ ligger på kuleflaten.

b) Vis at kulen har sentrum i $S(1,\, -1,\, 3)$. Bestem radien til kulen.

c) Bestem ligningen for tangentplanet α til kuleflaten i punktet A.

Et annet plan β går gjennom S og $B(1,\, 0,\, 1)$ og står normalt på α.

d) Bestem ligningen til β.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Ved inngangen til 2015 var folketallet i Norge 5 200 000. I en modell for befolkningsveksten antar vi at

- netto innvandring per år vil være 44 000
- antall som blir født per år, vil være 1,1 % av folketallet
- antall som dør per år, vil være 0,8 % av folketallet

Vi lar folketallet være $y(t)$, der t er antall år etter 2015.

a) Forklar at vi kan skrive

$$y' = 0{,}003y + 44000 \qquad , \qquad y(0) = 5200000$$

b) Løs differensiallígningen.

c) Når vil folketallet passere 7 millioner ifølge denne modellen?
Hvor stor er vekstfarten i folketallet da?

Oppgave 2 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\sqrt{x^2-x^4}$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

b) Bruk CAS til å bestemme de eksakte koordinatene til toppunktene på grafen til f.

c) Bestem det samlede arealet av områdene som er avgrenset av grafen til f og x-aksen.

Grafen til f roteres $360°$ om x-aksen.

d) Bestem volumet av omdreiningslegemet som da framkommer.

Oppgave 3 (7 poeng)

To plan α og β er gitt ved

$$\alpha:\ x-y-3=0$$
$$\beta:\ x+pz-4=0 \quad , \quad p\in\mathbb{R}$$

a) Vis at punktet $(4, 1, 0)$ ligger i begge planene.

b) Bestem p slik at vinkelen mellom α og β blir $60°$.

c) Hvilken verdi for p vil gi den minste vinkelen mellom α og β? Hvor stor er vinkelen da?

De to planene skjærer hverandre langs en linje ℓ.

d) Bestem en parameterframstilling for ℓ uttrykt ved p.

Oppgave 4 (4 poeng)

Om en uendelig geometrisk rekke vet vi at

- summen er 8
- summen av de tre første leddene er 7

a) Sett opp et ligningssystem som uttrykker opplysningene ovenfor.

b) Bruk CAS til å bestemme kvotienten k og det første leddet a_1 i rekken.