DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2\sin 3x$

b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

c) $h(x) = x\cos x^2$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (x^3 - 3x + 2)\ dx$

b) $\int xe^{2x}\ dx$

c) $\int x\sqrt{x^2+1}\ dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

Løs de trigonometriske likningene

a) $2\sin(2x) - 1 = 0 \quad , \quad x \in [0,\ 2\pi]$

b) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \quad , \quad x \in [0,\ 2\pi]$

Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=2\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+3 \quad , \quad x\in\langle -1,\,5\rangle$$

a) Bestem toppunktene og bunnpunktene på grafen til f.

b) Lag en skisse av grafen til f.

c) Bestem arealet av området som er avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x=0$ og $x=4$.

Oppgave 5 (8 poeng)

Gitt punktene $A(1\,,\,0\,,\,3)$, $B(3\,,\,2\,,\,-1)$ og $C(0\,,\,4\,,\,4)$

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

b) Vis at punktene A, B og C ligger i planet α gitt ved likningen

$$9x+y+5z=24$$

En linje ℓ står normalt på planet α og går gjennom punktet $T(11,\,7,\,5)$.

c) Bestem en parameterframstilling for linjen ℓ. Bestem skjæringspunktet mellom linjen ℓ og planet α.

d) Bestem volumet av pyramiden *ABCT.*

Oppgave 6 (3 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y''-9y'-10y=0$$

når $y(0)=4$ og $y'(0)=7$

Oppgave 7 (5 poeng)

En aritmetisk tallfølge a_n er definert ved at $a_n = 3n - 2$.

La $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

a) Bruk formelen for summen av en aritmetisk rekke til å vise at

$$s_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

b) Bruk induksjon til å bevise formelen for s_n som er gitt i oppgave a).

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Et firma skal sette opp en stolpe. Det gjør de ved å slå stolpen ned i jorda med en pælemaskin.

Det første slaget slår stolpen 12 cm ned i jorda. De neste slagene fører stolpen videre nedover, men stadig kortere for hver gang. Det viser seg at lengden som stolpen blir slått ned i jorda, blir redusert med 6,0 % for hvert slag.

a) Hvor mange slag må de minst slå for å få stolpen mer enn 1,0 meter ned i jorda?

b) Kan firmaet klare å slå stolpen så mye som 2,2 meter ned i jorda med denne pælemaskinen?

Oppgave 2 (6 poeng)

En linje ℓ går gjennom punktene $A(7\,,12\,,12)$ og $B(1\,,-6\,,-12)$.

a) Bestem en parameterframstilling for linjen ℓ .

En kuleflate K har sentrum i origo og radius 5.

b) Bestem skjæringspunktene mellom linjen ℓ og kuleflaten K.

Et plan α er gitt ved

$$\alpha: \; 4x - 3y + 7 = 0$$

Det er to plan som er parallelle med α , og som samtidig tangerer kuleflaten K.

c) Bestem likningen for hvert av disse planene.

Oppgave 3 (6 poeng)

Bestanden av ørret i et bestemt fiskevann avtar med 3,0 % per år.
Vi går ut fra at det er 10 000 ørreter i vannet ved starten av 2018.

a) Forklar at differensiallikningen gitt ved

$$y' = -0{,}03y \;, \quad y(0) = 10\,000$$

kan brukes til å bestemme ørretbestanden $y(t)$ i vannet t år etter starten av 2018.

b) Løs differensiallikningen.
Hvor mange ørreter vil det være i vannet i 2028?

Den lokale fiskeforeningen ønsker å sette ut et fast antall ørreter i vannet hvert år i ti år framover. Utsettingen starter tidlig i 2018 og skjer kontinuerlig over tiårsperioden. Målet er at det ved starten av 2027 skal være 15 000 ørreter i vannet.

c) Sett opp og grunngi en differensiallikning som kan brukes til å bestemme hvor mange ørreter de må sette ut hvert år for å nå målet.

d) Hvor mange ørreter må de sette ut hvert år for å nå målet?

Oppgave 4 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sqrt{2^2 - x^2} \quad , \quad x \in [-2,\ 2]$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.
Tegn også inn linjen gitt ved $g(x) = f(1)$ i samme koordinatsystem som grafen til f.

b) Bruk CAS til å bestemme arealet av sirkelsegmentet avgrenset av grafene til f og g.

Vi dreier dette sirkelsegmentet $360°$ om x-aksen.

c) Bruk CAS til å bestemme volumet av omdreiningslegemet vi da får.

Funksjonen F er gitt ved

$$F(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad , \quad x \in [-r, r] \quad , \quad r > 1 .$$

Linjen gitt ved $G(x) = F(1)$ skjærer grafen til F i punktene $(-1, F(-1))$ og $(1, F(1))$.
Området mellom grafene til F og G er et sirkelsegment. Vi roterer dette sirkelsegmentet $360°$ om x-aksen.

d) Vis ved hjelp av CAS at volumet av omdreiningslegemet vi da får, er uavhengig av r.