DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 6\cos(2x - 1)$

b) $g(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (2x^2 - 3x)\, \mathrm{d}x$

b) $\int 4x \cdot \cos(x^2 + 2)\, \mathrm{d}x$

c) $\int \frac{4}{x^2 - 4}\, \mathrm{d}x$

Oppgave 3 (4 poeng)

En geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots$$

a) For hvilke verdier av x konvergerer denne rekken?

b) Bestem x slik at rekken konvergerer mot 3.

Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = \sin x \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi$$
$$g(x) = \cos x \; , \quad 0 \le x \le 2\pi$$

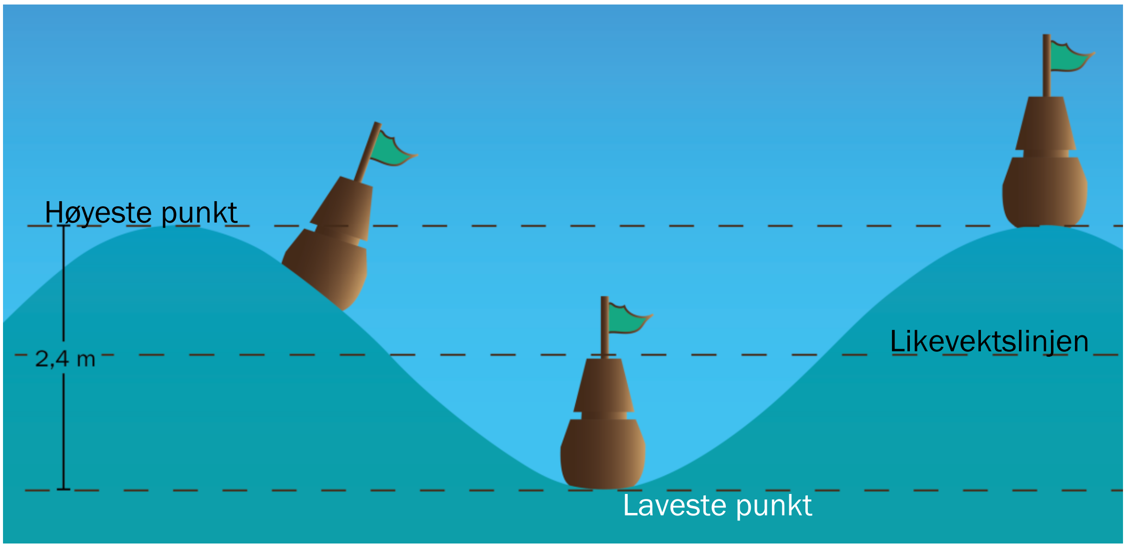
a) Lag en skisse av grafene til f og g i samme koordinatsystem.

b) Bestem eventuelle skjæringspunkt mellom grafene til f og g.

Grafene til f og g avgrenser et område.

c) Bestem arealet av dette området.

Oppgave 5 (4 poeng)



Bøyen sett ved tre ulike tidspunkt

En bøye beveger seg opp og ned med bølgene. I løpet av 4 s vil bøyen bevege seg 2,4 m i vertikal retning fra det høyeste punktet til det laveste punktet.

La $f(t)$ være høyden til bøyen (i meter) over likevektslinjen ved tidspunktet t (målt i sekunder). Anta at bøyen er på sitt høyeste punkt når $t = 0$.

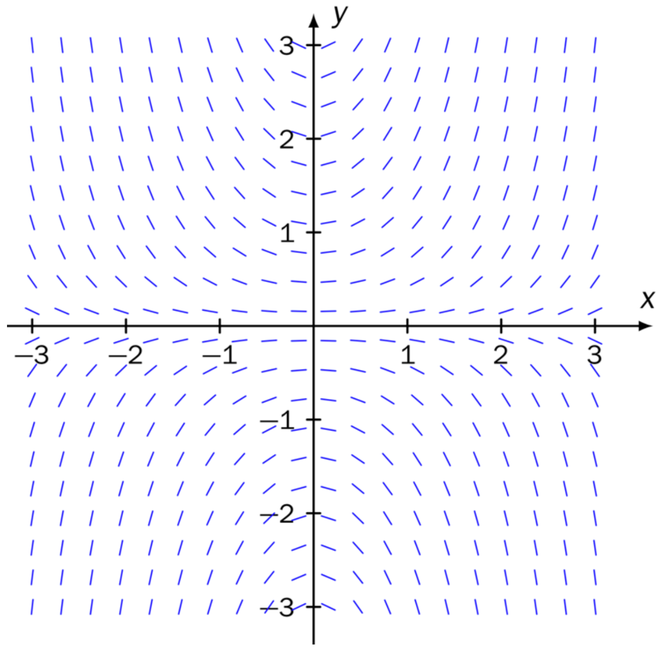
Vi går ut fra at $f(t)$ kan skrives på formen

$$f(t) = A\sin(ct + \varphi)$$

a) Bestem funksjonsuttrykket til f.

b) Når er bøyen 0,6 m over likevektslinjen i løpet av de 10 første sekundene?

Oppgave 6 (4 poeng)



Retningsdiagrammet på figuren tilhører én av differensiallikningene nedenfor.

1) $y' = x + y$

2) $y' = \dfrac{x}{y}$

3) $y' = x \cdot y$

a) Avgjør hvilke to av de tre differensiallikningene som ikke kan ha et slikt retningsdiagram.

b) Løs differensiallikningen du mener retningsdiagrammet tilhører.

Oppgave 7 (7 poeng)

Gitt punktene $A(-1,1,1)$, $B(1,-1,0)$ og $C(-1,0,2)$

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

b) Vis at *A*, *B* og *C* ligger i planet gitt ved

$$3x + 2y + 2z - 1 = 0$$

Gitt punktet $D(s^2 - 1, 3s + 1, 10)$, der s er et reelt tall.

c) Bestem volumet av tetraederet *ABCD* uttrykt ved s.

d) Bestem det minste volumet tetraederet kan ha.

Oppgave 8 (3 poeng)

Bruk induksjon til å bevise at påstanden $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Funksjonene *f* og *g* er gitt ved

$$f(x) = x^4 - 4x - 1$$
$$g(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1$$

a) Tegn grafene til *f* og *g* i et koordinatsystem.

De to grafene avgrenser et område M i planet.

b) Bestem arealet av *M*.

Funksjonene *F* og *G* er gitt ved

$$F(x) = x^4 - 4r^3 \cdot x - 1$$
$$G(x) = 4r \cdot x^3 - 6r^2 \cdot x^2 - r^4$$

Grafene til *F* og *G* avgrenser et område *N* i planet.

c) Bruk CAS til å vise at arealet av *N* er uavhengig av *r*.

Oppgave 2 (7 poeng)

Sentrum i en kuleflate K_1 med radius 2 beveger seg langs en rett linje. Ved tidspunktet *t* vil sentrum i K_1 ha koordinatene $(2t,\ 1,\ 3)$.

a) Bestem en likning for K_1 uttrykt ved *t*.

b) Ved hvilke tidspunkt vil K_1 tangere *yz*-planet?

En annen kuleflate K_2 med radius *r* er gitt ved likningen

$$K_2: \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

c) Ved hvilke tidspunkt vil de to kuleflatene K_1 og K_2 tangere hverandre dersom $r = 2$?

d) Bestem eksakt den minste verdien til *r* som gjør at de to kulene tangerer hverandre.

Oppgave 3 (4 poeng)

En bedrift slipper ut 20 000 tonn CO_2 i 2018. De har et mål om å redusere de årlige utslippene med 15 % hvert år fra og med 2019.

a) Hvor mye CO_2 vil bedriften slippe ut til sammen i løpet av de ti årene 2018–2027 dersom de klarer å nå målet?

En annen bedrift slipper ut 30 000 tonn CO_2 i 2018.

b) Hvor mange prosent må denne bedriften redusere utslippene med per år for at bedriftene til sammen skal slippe ut like mye i løpet av årene 2018–2027?

Oppgave 4 (8 poeng)

I en tank renner det inn vann med konstant fart. Samtidig renner det ut vann gjennom et hull i bunnen av tanken. Vannmengden som renner ut per minutt, er til enhver tid proporsjonal med vannmengden i tanken. La $y(t)$ liter være vannmengden i tanken etter t minutter. Da er y løsningen av differensiallikningen

$$y' = 3{,}2 - 0{,}14y \ , \ y(0) = 200$$

a) Forklar hva tallene 3,2 og 0,14 og 200 står for.

b) Løs differensiallikningen.

c) Hvor mye vann er det i tanken etter 20 min?

I en annen tank renner det inn 1,5 L vann per minutt. Også i denne tanken renner det ut vann gjennom et hull i bunnen. Vannmengden som renner ut, er proporsjonal med vannmengden i tanken. Når $t = 0$, er det 0 L i denne tanken. Etter lang tid vil vannmengden i tanken stabilisere seg på 10 L.

d) Hvor mye vann er det i denne tanken etter 20 min?