Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x)=2x\cos(3x)$

b) Deriver funksjonen $f(x)=3\left(e^{4x}+1\right)^2$

c) Gitt funksjonen $f(x)=\frac{2}{3}x^3-4x^2+x+2$

1) Ligger grafen over eller under *x*-aksen når $x=1$?

2) Stiger eller synker grafen når $x=1$?

3) Øker eller minker den momentane veksthastigheten når $x=1$?

d) Finn summen av den uendelige rekka: $9+0{,}9+0{,}09+0{,}009+\cdots$

e) Bestem integralet $\int \frac{4}{x^2-1}\,dx$

f) Funksjonen $f(x)=\frac{24}{\sqrt{x}}$ er gitt.

1) Vis at likningen for tangenten i punktet $\left(4\,,\ f(4)\right)$ er gitt ved $y=-\frac{3}{2}x+18$.

2) Bestem arealet av det området som er avgrenset av grafen til *f*, tangenten i $\left(4\,,\ f(4)\right)$ og linja $x=2$.

g) Gitt punktene $A(1, 1, 1)$, $B(3, 3, 2)$ og $C(2, 1, 2)$. Finn $\angle BAC$.

h) Løs differensiallikningen $y' + (\cos x) \cdot y = 0$ når $y(0) = 4$

i) En rekke er gitt ved at $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = a_n + n + 2$ der $n \in N$

1) Skriv opp de 5 første leddene i rekken.

2) Bruk induksjon til å bevise at det generelle leddet er $a_n = \dfrac{n(n+3)}{2}$

I Del 1 av eksamen kan du få bruk for eksaktverdier til noen vinkler:

v	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos v$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan v$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Del 2

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x) = 3(\sin x)^3$ der $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$

a) Tegn grafen til f, og finn nullpunktene til funksjonen.

b) Tegn fortegnslinja til $f'(x)$ og bruk den til å finne eventuelle topp-, bunn- og terrassepunkter på grafen til f.

Det kan vises at $\int f(x)\mathrm{d}x = a(\cos x)^3 + b\cos x + c$, der a, b og c er konstanter.

c) Vis at $a = 1$ og $b = -3$.

d) Bruk c) til å bestemme arealet som er avgrenset av grafen til f og som ligger over x-aksen.

Oppgave 3

I et koordinatsystem har vi punktene $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ og $C(0, 0, 5)$.

a) Tegn punktene i et koordinatsystem. Finn avstanden fra *A* til *B*.

b) Finn $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, og bruk svaret til å finne volumet av tetraederet *OABC*.

En arealsetning oppkalt etter Pytagoras sier at:

$$F_{\Delta ABC}^2 = F_{\Delta AOC}^2 + F_{\Delta BOC}^2 + F_{\Delta OAB}^2$$

Her betyr $F_{\Delta ABC}$ arealet av trekanten *ABC.* Tilsvarende gjelder for leddene på høyre side.

c) Regn ut de fire arealene, og kontroller at arealsetningen stemmer i dette tilfellet.

Planet α går gjennom punktene *A, B* og *C.*

d) Bestem likningen til planet α.

Et annet plan β er gitt ved

$$\beta: \quad x + y - z = 5$$

e) Finn vinkelen mellom planene α og β.

Vi lar nå punktet C få koordinatene $(0, 0, t)$. Vi antar at $t \neq 0$.

f) Forklar at likningen til planet α da kan skrives på formen

$$\alpha: \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{t} = 1$$

g) Finn likningen for det planet som α nærmer seg til når $t \to \infty$. Hva kan du si om dette planet?

Oppgave 4 – Alternativ I

Newtons 2. lov sier at $F = m \cdot a$, der F er summen av kreftene som virker på en gjenstand med masse m og akselerasjon a.

Vi minner om at akselerasjonen er den deriverte av farten med hensyn på tiden.

Newtons 2. lov kan for eksempel brukes til å beskrive og studere fallskjermhopp.

En fallskjermhopper med fallskjermen har til sammen massen m. La $v(t)$ være farten til hopperen ved tiden *t* etter uthoppet. Hoppingen skjer fra et utoverhengende fjell, slik at vi kan anta at $v(0) = 0$. Det er to krefter som virker på hopperen: tyngdekraften $m \cdot g$ og luftmotstanden som er $-k_1 \cdot v(t)$ når fallskjermen er lukket. Her er k_1 en konstant og g er tyngdeakselerasjonen. Alle størrelsene har benevning i SI-systemet, det vil si at masse måles i kg, tid måles i sekunder og strekning måles i meter.

a) Vis at Newtons 2. lov kan omformes til følgende differensiallikning:

$$v'(t) + \frac{k_1}{m} v(t) = g$$

Vi setter $m = 80$, $g = 10$ og $k_1 = 16$.

b) Vis at $v(t) = 50 - 50 \cdot e^{-0,2\,t}$ er en løsning av differensiallikningen i a).

c) Finn farten og akselerasjonen til hopperen når $t = 4$.

Etter 5 sekunder drar hopperen i snora og utløser fallskjermen. Vi regner med at luftmotstanden nå blir $-k_2 \cdot v(t)^2$. Vi setter $g = 10$ og $k_2 = 8$.

d) Bruk Newtons 2. lov til å sette opp en differensiallikning for situasjonen når fallskjermen er åpnet.

e) Differensiallikningen i d) er separabel. Vi setter v i stedet for $v(t)$. Vis at vi kan skrive differensiallikningen som:

$$\left(\frac{1}{10 - v} + \frac{1}{10 + v} \right) \frac{dv}{dt} = 2$$

f) Finn et uttrykk for v ved å løse differensiallikningen i e).

Oppgave 4 – Alternativ II

Vi har gitt differensiallikningen

$$y' - \frac{x}{x^2-1}\cdot y = 0 \qquad \text{der} \qquad x \neq -1 \text{ og } x \neq 1$$

a)

1) Vis at $y = C\sqrt{1-x^2}$ er en løsning når $x \in \langle -1,\ 1\rangle$.

2) Skisser grafene til y for $C = 1$ og for $C = -1$.

3) Velg andre verdier for C og skisser grafene til y. Kommenter.

b)

1) Vis at $y = C\sqrt{x^2-1}$ er en løsning når $x \in \langle \leftarrow, -1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$.

2) Velg ulike verdier for C og skisser grafene til y. Kommenter.

c)

1) Løs differensiallikningen ved regning

$$y' - \frac{2}{x^2-1}\cdot y = 0 \qquad \text{når } y(0) = C$$

2) Velg ulike verdier for C, og tegn de tilhørende grafene til y.