DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (18 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = 2\sin(2x)$

2) $g(x) = x^2 \cdot \cos(2x)$

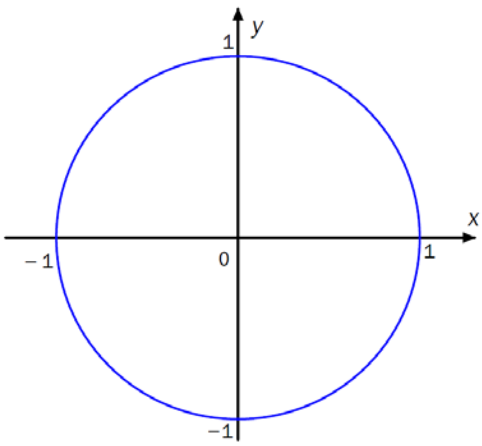
3) $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 4x}$

b) Bestem integralene

1) $\int x \cdot e^x \, dx$

2) $\int \frac{5x+3}{x^2-9} \, dx$

c) Figuren nedenfor viser en sirkel med sentrum i origo og radius lik 1.



Bruk et geometrisk resonnement til å bestemme $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, dx$

Forklar hvordan du har tenkt.

d) Vi har gitt to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Forklar og tegn figurer som viser hvordan vektorene kan ligge i forhold til hverandre når

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

e) Vi har gitt punktene $A(1, 1, -1)$, $B(2, -1, 3)$ og $C(3, 2, 2)$

Vis ved regning at $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ står vinkelrett på både $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$

f) Bevis formelen ved induksjon:

$$1 + 4 + 16 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

Oppgave 2 (6 poeng)

a) Finn den generelle løsningen til differensiallikningen

$$y' - 2y = 5$$

der y er en funksjon av x.

b)

1) Bestem konstanten i den generelle løsningen når du får vite at $y(0) = 2$

2) Bestem x når $y = \frac{49}{2}$. (Du kan få bruk for at $\ln 6 \approx 1{,}8$)

c) Grafen til y har en tangent i punktet $(0, 2)$.

Finn likningen for denne tangenten.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 3 (4 poeng)

Kilde: www.bokstavbutikken.no (08.02.2011)

En fabrikk lager skaft til et kontorstempel. Skaftet ser ut som det omdreiningslegemet vi får når vi dreier grafen til f 360° om x-aksen, der

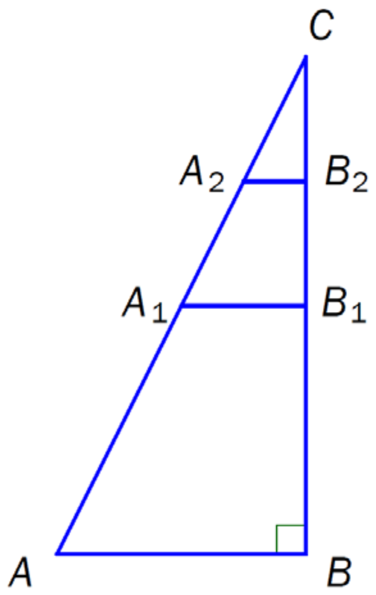
$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{3}} \quad , \qquad x \in [0, 4]$$

a) Tegn grafen til f. Finn diameteren til skaftet der skaftet er bredest.

b) Bestem volumet av skaftet.

Oppgave 4 (4 poeng)

Vi skal se på en rettvinklet trekant ABC der $AB = 8$ og $BC = 16$. Punktet A_1 halverer AC, A_2 halverer A_1C og så videre. Punktet B_1 halverer BC, B_2 halverer B_1C og så videre. Se skissen nedenfor.



a)

1) Forklar at summen av arealene til trapesene ABB_1A_1, $A_1B_1B_2A_2$ og så videre kan skrives

$$48 + 12 + 3 + \cdots$$

2) Forklar at dette er en geometrisk rekke, og at rekken konvergerer.

b) Finn summen til den uendelige rekken, både ved å bruke formelen for sum av en rekke og ved å bruke et geometrisk resonnement.

Oppgave 5 (10 poeng)

En rett linje l er gitt ved parameterframstillingen

$$l: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

a) Linjen l skjærer xy-planet i punktet A og xz-planet i B.

Regn ut avstanden mellom A og B.

En annen rett linje m er gitt ved parameterframstillingen

$$m: \begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 1 + s \end{cases}$$

b) Vis at linjene l og m ikke er parallelle.

To linjer i rommet som verken er parallelle eller skjærer hverandre, er *vindskeive*.
For vindskeive linjer gjelder denne setningen:

> *Når to linjer l og m er vindskeive, fins det et punkt P på l og et punkt Q på m slik at $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både l og m. Avstanden mellom l og m er definert som $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$.*

c) Vi lar P være et tilfeldig valgt punkt på l og Q et tilfeldig valgt punkt på m.

Vis at vi kan skrive $\overrightarrow{PQ} = \left[s + 2t - 5,\ -s - t - 2,\ s - 2t - 3\right]$

d) Finn koordinatene til P og Q når $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelrett på både l og m.

e) Finn avstanden mellom linjene l og m.

Oppgave 6 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = -5\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 5\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) \quad , \qquad x \in [0,\ 24]$$

a) Tegn grafen til f. Les av amplituden og perioden til f.

b) Tegn fortegnslinjen til f' og bruk denne til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Lufttemperaturen g (målt i grader Celsius) gjennom et sommerdøgn er gitt ved

$$g(x) = 22 - 5\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 5\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)$$

der x er antall timer etter midnatt.

c) Bestem høyeste og laveste temperatur dette døgnet. På hvilke tidspunkter inntreffer disse temperaturene?

Oppgave 7 (10 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = 5x^2 \cdot e^{-x} \quad , \qquad x > 0$$

a) Tegn grafen til f.

b)

1) Vis at $f'(x) = 5\left(2x - x^2\right) \cdot e^{-x}$. Hvilke derivasjonsregler har du brukt?

2) Tegn fortegnslinjen til f'. Bruk denne til å finne ut hvor f vokser, og hvor f avtar. Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c) Vis ved derivasjon at

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -5x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} - 10x \cdot \mathrm{e}^{-x} - 10\,\mathrm{e}^{-x} + C$$

d) Du får vite at $\lim\limits_{a \to \infty} (a^n \cdot \mathrm{e}^{-a}) = 0$ for $n \in \mathbb{R}$.

Bruk dette til å bestemme

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$