DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3\cos x$

b) $g(x) = 6\sin(\pi x) + 7$

c) $h(x) = 3e^{2x} \cdot \sin(3x)$

Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralet $\int \frac{2x}{x^2 - 4}\,dx$ ved å bruke

a) variabelskifte

b) delbrøkoppspalting

Oppgave 3 (4 poeng)

Punktene $A(1, -1, 0)$, $B(3, 1, 1)$ og $C(0, 0, 0)$ er gitt.

a) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Bruk resultatet til å bestemme arealet av $\triangle ABC$.

b) Bestem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Bruk blant annet dette resultatet til å bestemme arealet av $\triangle ABC$.

Oppgave 4 (3 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y' = 6xy \quad \text{når} \quad y(0) = 2$$

Oppgave 5 (5 poeng)

En rekke er gitt ved

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + a_n$$

a) Bestem a_{16} og S_{16}

b) Forklar at rekken er aritmetisk, og bruk dette til å finne et uttrykk for a_n og S_n.

c) Bestem hvor mange ledd rekken minst må ha for at $S_n > 400$.

Oppgave 6 (2 poeng)

Følgende informasjon er gitt om en kontinuerlig funksjon f:

- $f(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) < 0$ for $x \in \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$
- $f'(x) = 0$ for $x = -2$ og for $x = 2$
- $f''(x) = 0$ for $x = 1$ og for $x = 3$

Lag en skisse som viser hvordan grafen til f kan se ut.

Oppgave 7 (2 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

En pasient får 8 mL av en medisin hver time. Den totale mengden medisin i kroppen t timer etter at medisineringen startet, er $y(t)$ mL. I løpet av en time skiller kroppen ut 5 % av den totale medisinmengden.

a) Forklar at

$$y' = 8 - 0{,}05 \cdot y$$

b) Vis at $y(t) = 160 - 160e^{-0{,}05t}$ når $y(0) = 0$

c) Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$. Kommenter svaret.

Oppgave 2 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 12\,e^{-0{,}5x} \cdot \sin(0{,}5x) \quad , \quad x \in \left[0,\, 4\pi\right]$$

a) Tegn grafen til f.

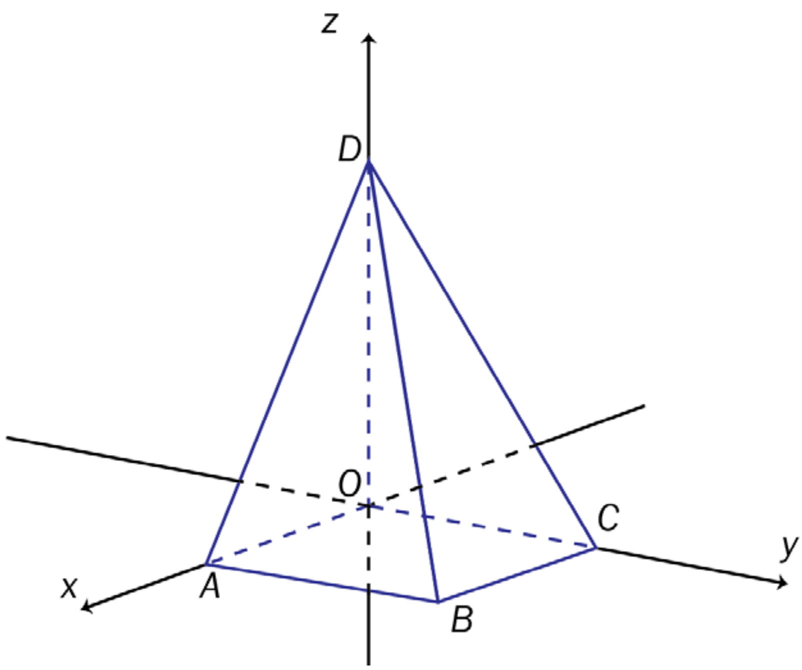
b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c) Bestem arealet som er begrenset av grafen til f og x-aksen.

Oppgave 3 (8 poeng)

Skissen nedenfor viser en pyramide $OABCD$ som er plassert i et romkoordinatsystem.

Hjørnene i pyramiden er $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(3, 3, 0)$, $C(0, 3, 0)$ og $D(0, 0, 4)$.



a) Bestem ved regning arealet av sideflaten ABD i pyramiden.

b) Sideflaten ABD ligger i et plan α.

Vis ved regning at planet α har likningen

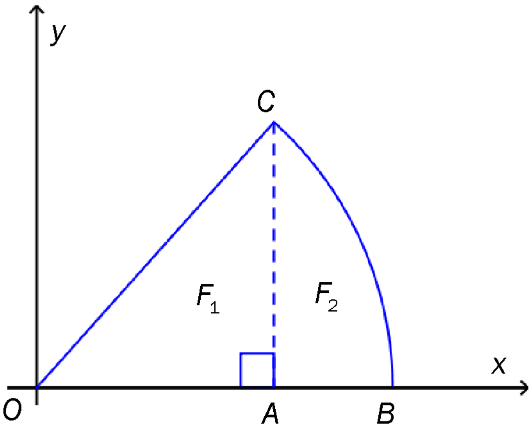
$$4x + 3z - 12 = 0$$

c) Bestem avstanden fra punktet O til planet α.

d) Bestem ved regning vinkelen mellom de to planene som sideflatene ABD og BCD ligger i.

Oppgave 4 (6 poeng)

Figuren nedenfor viser en sirkelsektor OBC der C ligger i første kvadrant. Buen $\overset{\frown}{BC}$ er en del av sirkelen med likning $x^2 + y^2 = 9$. Punktet A har koordinatene $(2, 0)$ og $\angle OAC = 90°$



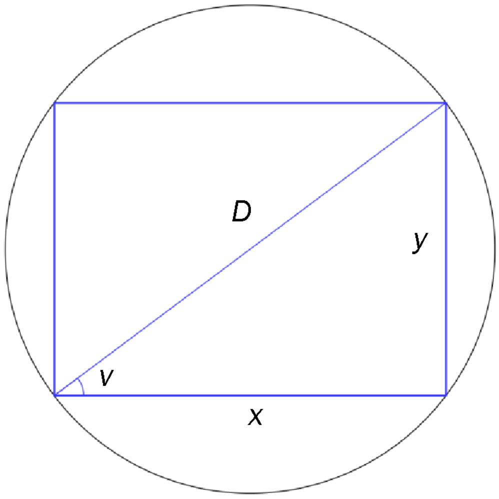
a) Vis at koordinatene til C er $(2, \sqrt{5})$.
   Bestem likningen for den rette linjen gjennom O og C.

b) Når flatestykket F_1 (ΔOAC) dreies $360°$ om x-aksen, får vi en kjegle.
   Bestem volumet av denne kjeglen ved hjelp av integralregning.

c) Når flatestykket F_2 dreies $360°$ om x-aksen, får vi et kulesegment.
   Bestem volumet av dette kulesegmentet ved hjelp av integralregning.

Oppgave 5 (6 poeng)

På figuren er et rektangel med sider x og y innskrevet i en sirkel. Sirkelen har diameteren D. $\angle v$ er vinkelen mellom x og D.



a) Forklar at omkretsen O til rektangelet kan skrives som

$$O(v) = 2D\cos v + 2D\sin v$$

Bestem også et funksjonsuttrykk for arealet $A(v)$ av rektangelet.

b) Bruk $O'(v)$ og vis at det rektangelet som har størst omkrets, er et kvadrat.

Bestem den største omkretsen av rektangelet uttrykt ved diameteren D.

c) Bruk $A'(v)$ og vis at det rektangelet som har størst areal, også er et kvadrat.

Bestem det største arealet av rektangelet uttrykt ved diameteren D.

Oppgave 6 (6 poeng)

Sierpiński-trekanten, som har sitt navn etter den polske matematikeren Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969), lages slik:

1. Vi starter med en likesidet, svart trekant som har areal *A*. Se figur 1.

2. Midtpunktet på hver av sidene i trekanten er hjørnene i en ny hvit, likesidet trekant. Denne hvite trekanten fjerner vi. Vi står da igjen med tre likesidede, svarte trekanter. Se figur 2.

3. Vi gjentar denne prosessen med hver av de svarte trekantene. Se figurene 3–5. Vi tenker oss at prosessen blir utført uendelig mange ganger. Den «gjennomhullede» figuren vi da står igjen med, kalles *Sierpiński-trekanten*.

Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4 Figur 5

Summen av arealene som fjernes (de hvite trekantene), er gitt ved rekken

$$A\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\frac{27}{256}+\dots\right)$$

a) Bestem summen av rekken ovenfor.
Hva forteller svaret ditt om arealet av *Sierpiński-trekanten*?

b) Sidene i trekanten i figur 1 er lik a.

Forklar at omkretsene av de svarte trekantene i figurene $2-5$ ovenfor er henholdsvis

$$3\cdot\frac{3}{2}\cdot a\,,\quad 3\cdot\frac{9}{4}\cdot a\,,\quad 3\cdot\frac{27}{8}\cdot a \quad \text{og} \quad 3\cdot\frac{81}{16}\cdot a$$

c) Vi gjør prosessen som forklart i trinn 2 ovenfor n ganger. Forklar at omkretsen av de svarte trekantene da er lik $3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot a$

Forklar at $3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot a \to \infty$ når $n\to\infty$

Hva forteller dette om omkretsen til *Sierpiński-trekanten*?