DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = -3\cos x$

b) $g(x) = \sin^2 x$

c) $h(x) = x^3 \cdot e^{-x}$

Oppgave 2 (5 poeng)

Regn ut integralene

a) $\int_1^2 (x^2 + 2x - 3)\,dx$

b) $\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\,dx$

c) $\int x \cdot \ln x\,dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

a) Bruk en integrasjonsmetode til å vise at $\int x \cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

b) Løs differensiallikningen

$$y' + 2xy = 4x \quad , \quad y(0) = 8$$

Oppgave 4 (3 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \dots \quad , \quad x \neq 0$$

a) Bestem konvergensområdet til rekken.

b) Bestem x slik at $S(x) = 4$

Oppgave 5 (6 poeng)

Punktene $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ og $C(0, 0, 1)$ er gitt.

a) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Bestem arealet av $\triangle ABC$.

b) Punktene A, B og C ligger i et plan α. Bestem likningen for planet α.

En partikkel starter i origo $O(0, 0, 0)$. Etter tiden t er partikkelen i et punkt P gitt ved

$$\overrightarrow{OP} = \left[t \, , \, \frac{t^2}{3} , -\frac{t}{4} \right] \quad , \quad t \geq 0$$

c) Hvor lang tid tar det før partikkelen treffer planet α? Bestem koordinatene til punktet der partikkelen treffer α.

Oppgave 6 (2 poeng)

En tallfølge $\{a_n\}$ er gitt ved at $a_1 = -1$ og $a_{n+1} = a_n + n - 1$

Bruk induksjon til å bevise at $a_n = \dfrac{n(n-3)}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

Oppgave 7 (6 poeng)

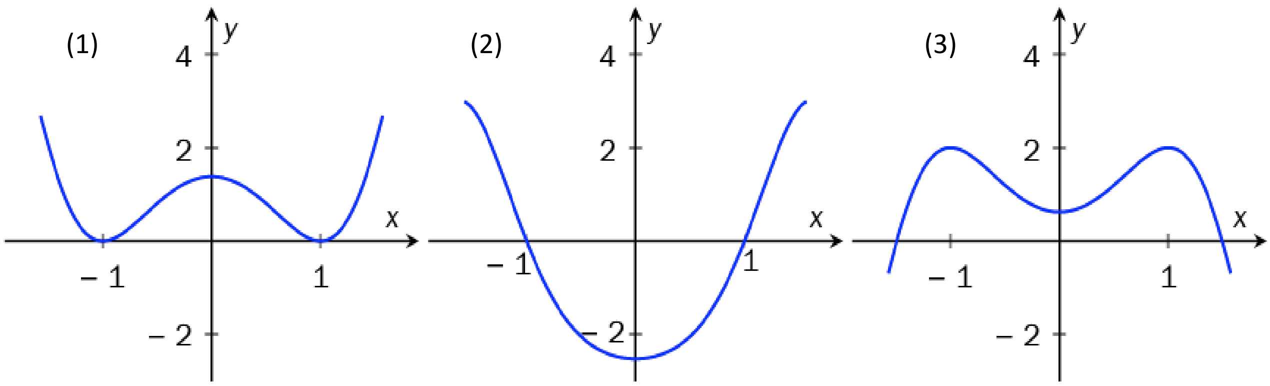
Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3 - 3\cos(1 - x^2) \quad , \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

a) Bestem nullpunktene til f ved regning.

b) Bruk $f'(x)$ til å bestemme x-verdien til eventuelle topp- eller bunnpunkter på grafen til f.

c) Nedenfor er det tegnet tre grafer. Én av dem er grafen til f. Avgjør hvilken.
Begrunn svaret.



Oppgave 8 (4 poeng)

En trigonometrisk formel er gitt ved

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

a) Bruk formelen til å bestemme et uttrykk for $\cos(2x)$.

b) Skriv uttrykket $\cos^4 x - \sin^4 x$ så enkelt som mulig.

Oppgave 9 (2 poeng)

Løs likningen

$$\sin x + \cos x = 1 \qquad , \qquad x \in [0, 2\pi]$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Roger planlegger en sykkeltur. Han regner med å kunne starte med farten 26 km/h. Etter hvert vil farten avta etter formelen

$$v(t) = 26 - 0,08 \cdot s(t)$$

- $v(t)$ og $s(t)$ er begge funksjoner som er avhengige av tiden t målt i timer
- $v(t)$ er farten målt i kilometer per time
- $s(t)$ er den tilbakelagte veilengden målt i kilometer

a) Bestem farten etter 125 km.

Formelen ovenfor kan vi skrive som differensiallikningen

$$s'(t) = 26 - 0,08 \cdot s(t)$$

b) Bestem $s(t)$ når $s(0) = 0$.

c) Hvor langt sykler Roger den første timen? Hvor lang tid bruker han på 125 km?

Oppgave 2 (6 poeng)

Hjørnene i en pyramide $ABCP$ er $A(0,0,0)$, $B(1,0,-1)$, $C(1,1,0)$ og $P(t, 2t+1, t^2+2)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem et uttrykk for volumet $V(t)$ av pyramiden.

b) Bestem koordinatene til P slik at $V(t) = \dfrac{7}{2}$.

c) Bestem koordinatene til P slik at volumet $V(t)$ blir minst mulig.

Oppgave 3 (6 poeng)

London Eye er et pariserhjul med diameter lik 135 m. En runde tar 30 min. Passasjerene går ombord i pariserhjulet fra en plattform som ligger 2 m over bakkenivå.

Etter t min fra ombordstigning er en passasjer $h(t)$ m over bakkenivå. Det kan vises at

$$h(t) = -67{,}5\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right) + 69{,}5$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til h for $t \in [0,\ 30]$. Bestem grafisk når passasjeren er 50 m over bakkenivå.

b) Bestem vendepunktene på grafen til h.
Forklar hvilken praktisk informasjon verdiene av $h'(7{,}5)$ og $h'(22{,}5)$ gir.

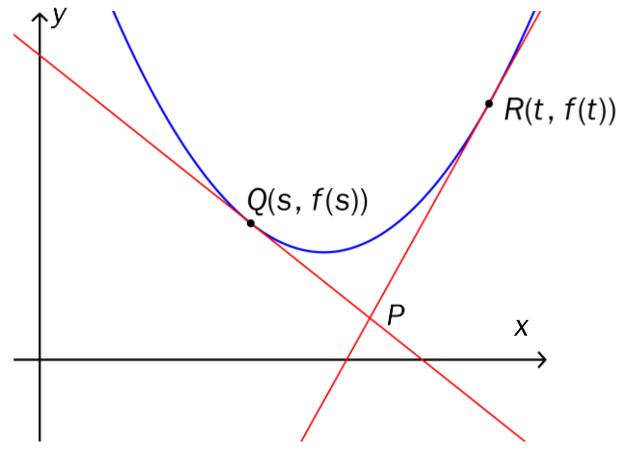
Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

Tangentene i punktene $Q(s, f(s))$ og $R(t, f(t))$ skjærer hverandre i et punkt P.

Se skisse 1.



Skisse 1

a) Vis at likningene for de to tangentene er

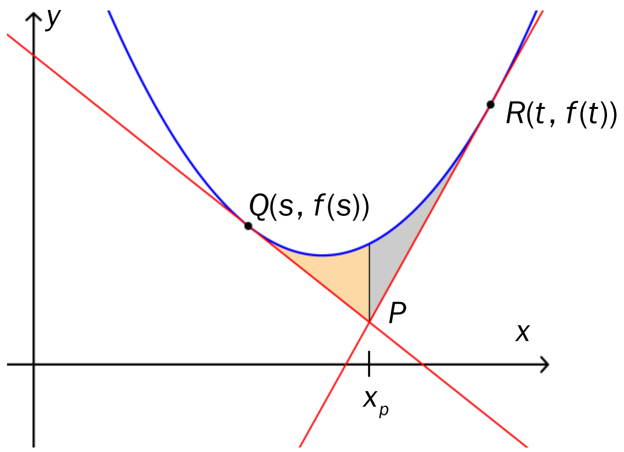
$$g(x) = (a+2s)x + b - s^2 \quad \text{og} \quad h(x) = (a+2t)x + b - t^2$$

b) Bruk CAS til å vise at x-koordinaten til punktet P er gitt ved $x_p = \dfrac{s+t}{2}$

Den vertikale linjen $x = x_p$ deler området mellom grafen og tangentene i to områder.

Se skisse 2.

c) Bruk CAS til å vise at arealene av de to områdene er like store for alle verdier av a og b.



Skisse 2